Analiza zespolona
Lista 5

Zad 1. Zbadać holomorficzność funkcji

a) $f(z) = \operatorname{Re} z \cdot z$, b) $f(z) = z^2$, c) $f(z) = \frac{1}{z}$.

Zad 2. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(z) = \cos z$, $f(z) = z \cdot \sin |z|$.

Zad 3. Wiedząc, że funkcja f jest holomorficzna i

a) $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} z + 1$ i $f(0) = 1 + i$,

b) $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z$ i $f(0) = 0$,

c) $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z)$ i $f(2) = 1 + i$,

znaleźć jawną postać f.

Zad 4. Niech $f(z) = \ln z$. Znaleźć $f(D)$, gdzie

$$D = \{z \in \mathbb{C} : e^{-1} < |z| \leq e\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ i } \operatorname{Re} z \leq 0\}.$$

Zad 5. Niech $f(z) = Rez$ i niech Γ będzie,
a) odcinkiem o początku $-i$ i końcu i,
b) lewym półokręgiem łączącym punkty $-i$ i i,
c) prawym półokręgiem łączącym punkty $-i$ i i.
Obliczyć całkę $\int_\Gamma f(z)\,dz$.

Zad 6. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{1}{\xi}\,d\xi,$$

gdzie γ jest dowolnie wybraną krzywą nieprzechodzącą przez zero i łączącą punkty 1 i z.

Zad 7. Obliczyć całkę

$$\int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n\,dz, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Zad 8. Obliczyć całki:

a) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} z - 1 + \frac{1}{(z-1)^2}\,dz$, b) $\displaystyle\int_{|z-z_0|=r} \overline{z}\,dz$, c) $\displaystyle\int_{[1+i,1-i]} ze^{z^2}\,dz$.

Zad 9. Obliczyć całki:

a) $\int_\Gamma Re\, z\,dz$, gdzie Γ jest częścią krzywej $y^2 = x$ łączącą punkt $(0,0)$ z punktem $(1,1)$,

b) $\int_\Gamma \frac{dz}{1+z^2}$, gdzie Γ jest elipsą $x^2 + 4y^2 = 1$,

c) $\int_\Gamma \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)} \sin z\,dz$, gdzie Γ jest okręgiem $C(2+i, \sqrt{2})$,

d) $\int_{|z-1|=2} z + \frac{1}{z^2}\,dz$.